# مدل‌سازی
## چیست و به چه‌کار می‌آید!

**محمدتقی طاهری تنجانی**
دبیر ریاضی و از مؤلفان کتاب درسی حسابان

اگر بـــه بازی‌های کودکانه توجه کنیم، درمی‌یابیم که تمام آن‌ها به نوعی مدل‌های زندگی ما بزرگ‌سالان هستند. وقتی کودکی عروسکی را در آغوش می‌گیرد، همـــان رفتار و حرکاتی را دارد کـــه مادران هنگام در آغـــوش گرفتن فرزندان از خود بـــروز می‌دهند. وقتی کودکی اتومبیل اســـباب‌بازی را روی زمین می‌کشد، ساده‌ترین شکلی است که در دنیای کودکانه می‌توان اتومبیل را مدل‌سازی کرد.

زندگـــی جمعیتی را در نظـــر بگیرید. برای تأمین غذای این جمعیت چه چیزهایی لازم اســـت بدانیم؟! مثلاً باید بدانیم میزان رشـــد و یا کاهش این جمعیت چقدر اســـت؟ میزان مصرف روزانهٔ آن چقدر است؟ یا دربارهٔ یک بیماری همه‌گیر باید بررسی شود، چند نفر و با چه میزان ایمنی، مبتلا یا در معرض خطر ابتلا به بیماری هســـتند. در فیزیک یا مهندســـی باید بدانیم، چگونه گرما از طریق پوشـــش گرمایی یک ماشـــین فضایی هـــدر می‌رود؟ یا چگونه ســـیارات گوناگون بر یکدیگر کشش‌های جاذبه‌ای اِعمال می‌کنند.

**کپلر**، ستاره‌شـــناس بزرگ، در طول ۲۳ سال کار مداوم به بیان ریاضی علت و چگونگی حرکت سیارات در قالب سه قانون کپلر پرداخت. البته برای رسیدن به این ســـه قانون مجبور شد فرض‌هایی را در نظر بگیرد. مثلاً ســـیارات را به‌صورت نقطـــه در نظر گرفت و در حرکت، تعیین مسیرها و اندازه‌گیری‌ها، از تقریب‌های مناسب استفاده کرد.

همهٔ ما زمین را به شکل یک کره در نظر می‌گیریم و حال آنکه واقعیت امر این نیســـت. کره ساده‌ترین و نزدیک‌ترین شیء ریاضی است که زمین به آن شباهت دارد. همین در نظر گرفتن شکل زمین به‌صورت کره، نوعی مدل‌ســـازی ریاضی است. وقتی که کپلر قوانین حرکت ســـیارات را در قالب سه قانون خود با استفاده از نمادهـــا، اصطلاحات و قوانین ریاضی بیان داشـــت، درواقع حرکت سیارات را مدل‌سازی ریاضی کرد.

هدف از مدل‌ســـازی تبدیـــل پدیده‌های فیزیکی، اجتماعـــی، اقتصادی و... به فرمول‌های ریاضی اســـت. مثلاً در علم اقتصاد ممکن اســـت بخواهند پیش‌بینی کنند، ضربه به صنعت فولاد چه پیامدهایی برای دیگر بخش‌های اقتصادی، مثل اشـــتغال (و نرخ بی‌کاری)، تولید ناخالص ملی و... دارد.

کســـب مهارت در مدل‌سازی به موفقیت در به‌کار بردن دانـــش ریاضی و همچنیـــن درک مفاهیم برای اثبات قضایا و حل معادلات نیاز دارد.

مدل‌سازی برای دستیابی به بهترین جواب ممکن یا کم‌هزینه‌ترین جواب صورت می‌گیرد. مدل‌ســـازی علمی اســـت متکی بر ریاضی و آمـــار و دو بعد دارد: یکی بعـــد علمی و دیگر بعد هنـــری. جنبهٔ علمی آن قابل فراگیری اســـت، اما جنبهٔ هنری آن به تمرین و ممارست، و نیز ذوق و فکر خلاق احتیاج دارد.

مدل‌سازی فرایندی است که در شبکهٔ عصبی مغز، با تفکر آغاز و با درک واقعیت‌ها فرمول‌بندی می‌شود و با پردازش تجربیات و نمایش مجدد اطلاعات جهان خارج ادامه می‌یابد. نتیجهٔ این فرایند مدل نامیده می‌شـــود. مدل ریاضی مدل آفریده شـــده توسط مفاهیم ریاضی است که معمولاً با توابع و معادلات بیان می‌شود.

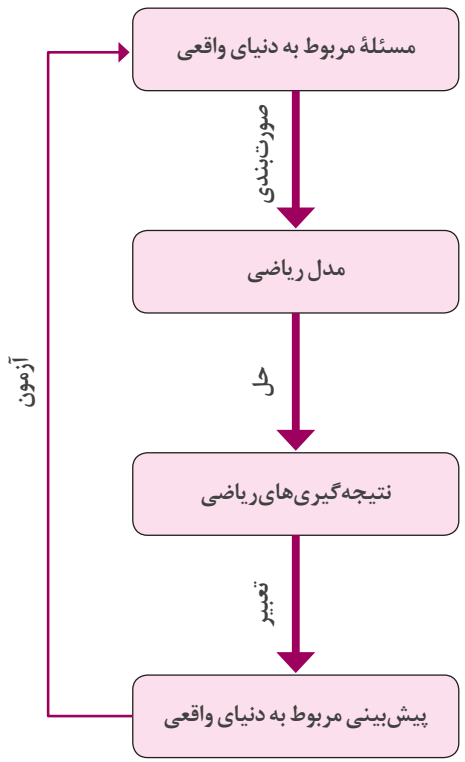
وقتـــی مدل‌های ریاضی را به وجـــود می‌آوریم، از دنیای واقعی به دنیای مجرد ریاضی وارد می‌شویم که ســـاختمانی از مدل واقعی است. ســـپس با استفاده از روش‌های ریاضی یا محاســـبات رایانه‌ای جواب مدل را می‌یابیم و در پایان دوباره از حل مدل ریاضی مســـئله به مـــدل واقعی برمی‌گردیم. در این مرحله اســـت که تجزیه و تحلیل مدل مطرح می‌شـــود. بدیهی است که شروع و پایان کار هر دو در دنیای واقعی است.

یکی از سودمندی‌های کاربرد مدل ریاضی این است که فرد می‌تواند تأثیرات تغییرات را در سیســـتم بدون

اینکه چیزی در دنیای واقعی عوض شود، بررسی کند.

نمودار ۱ روند مدل‌سازی ریاضی را نشان می‌دهد. اگر مسئله‌ای مربوط به دنیای واقعی (پیرامونی) داشته باشیم، قدم اول صورت‌بندی مدل ریاضی برای آن، مشخص کردن و نام‌گذاری متغیرهای مستقل و وابسته و پذیرش فرض‌هایی است که این پدیده را آن‌قدر ساده کنند که مسئلهٔ متناظر آن از نظر ریاضی قابل حل باشد. باید با استفاده از دانش فیزیکی و مهارت‌های ریاضی‌مان معادله‌هایی را به دست آوریم که متغیرها را به هم ربط دهند. در مواردی که هیچ قانون فیزیکی راهگشا نیست، لازم است از طریق جمع‌آوری اطلاعات از کتابخانه و اینترنت و یا آزمایش، اطلاعات را جمع‌آوری کنیم و جدول حاصل از این اطلاعات را در پی یافتن الگوهایی بررسی کنیم.

از این نمایش عددی تابع ممکن است بتوانیم نمایشی نموداری برای تابع پیدا کنیم.




نمودار ۱

قدم دیگر استفاده از ریاضیاتی است که به ما کمک می‌کند، نتیجه‌های ریاضی مدلی را که طراحی کرده‌ایم، به دست آوریم. در مرحلهٔ بعد، با توضیح و تفسیر این نتایج آن‌ها را به اطلاعاتی دربارهٔ مسئلهٔ اولیه تبدیل کنیم. و گام آخر اینکه درستی تفسیرهایمان را روی داده‌های واقعی می‌آزماییم. اگر این تفسیرها با واقعیات تطابق نداشتند، باید بخشی از مدل‌سازی را بازسازی کنیم، یا به طراحی جدیدی دست بزنیم و این چرخه را دوباره تکرار کنیم.

مدل‌های ریاضی هیچ‌گاه بیان کاملاً روشن وضعیت‌های فیزیکی نیستند. مدل خوب مدلی است که در آن واقعیات آن‌قدر ساده‌سازی می‌شوند که بتوان محاسبات ریاضی مربوط را با دقتی انجام داد که به نتیجه‌های به‌دردبخور بیانجامند. باید محدودیت‌های مدل را هم مد نظر داشت. دست آخر طبیعت حرف آخر را می‌زند!

انواع متفاوتی از توابع هستند که می‌توان از آن‌ها برای مدل‌سازی رابطه‌های موجود در طبیعت استفاده کرد. در ادامه به چند نمونه از مسائل در رابطه با مدل‌سازی اشاره می‌شود.

✦ **مثال ۱.** وقتی هوای گرم بالا می‌رود، منبسط و سرد می‌شود. اگر دمای هوا در سطح زمین ۲۰ درجهٔ سانتی‌گراد و در ارتفاع یک کیلومتری بالای سطح زمین، ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، دمای T را برحسب تابعی از ارتفاع h(T برحسب $C^\circ$ و h بر حسب کیلومتر) بنویسید و تعیین کنید، دما در ارتفاع ۲/۵ کیلومتری سطح زمین چقدر است.

✦ **راه‌حل:** چون فرض کرده‌ایم T تابعی خطی برحسب h است، می‌توان نوشت: $T=mh+b$

می‌دانیم اگر: $h=0$، آن‌وقت $T=20$ و در نتیجه:

$$20 = m\times 0 + b \Rightarrow b = 20$$

همچنین می‌دانیم اگر: $h=1$، پس: $T=10$. در نتیجه:

$$10 = m\times 1 + 20 \Rightarrow m = -10$$

و تابع خطی مورد نظر $T=-10h+20$ است.

در ارتفاع ۲/۵ کیلومتری دما برابر است با:

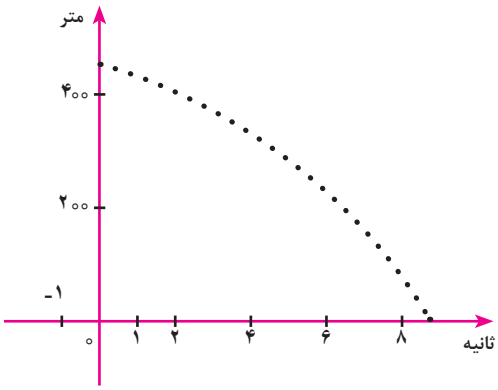
$$T = -10(2/5) + 20 = -5C^\circ$$

✦ **مثال ۲.** توپی را از ارتفاع ۴۵۰ متری برج میلاد رها می‌کنیم. ارتفاع توپ از سطح زمین (h) در فاصلهٔ زمانی به طول ۱ ثانیه در جدول ۱ ثبت شده است. مدل مناسبی پیدا کنید که به این داده‌ها بخورد و با استفاده از این مدل زمان برخورد توپ با زمین را پیش‌بینی کنید.

| ارتفاع (متر) | زمان (ثانیه) |
|---|---|
| ۴۵۰ | ۰ |
| ۴۴۵ | ۱ |
| ۴۳۱ | ۲ |
| ۴۰۸ | ۳ |
| ۳۷۵ | ۴ |
| ۳۳۲ | ۵ |
| ۲۷۹ | ۶ |
| ۲۱۶ | ۷ |
| ۱۴۳ | ۸ |
| ۶۱ | ۹ |

جدول ۱

✦**راه‌حل:** نمودار پراکندگی داده‌ها را به‌صورت **نمودار ۲** رسم کرده‌ایم.




نمودار ۲

معلوم است که مدل خطی در اینجا مناسب نیست. اما به نظر می‌رسد نقطه‌های داده شده روی یک سهمی قرار دارند. لذا از مدل درجهٔ دوم استفاده می‌کنیم. با استفاده از ماشین‌حساب مدل درجهٔ دوم زیر به دست می‌آید:

$$h = ۴۵۰ + t - ۴/۹t^۲$$

البته توجه داریم که این مدل تقریباً نقاط جدول را با یک خطای کم در برمی‌گیرد.

وقتی توپ به زمین می‌خورد که: $h=۰$. از حل معادلهٔ درجهٔ دوم $h=۰$ مقدار $t$ تقریباً ۹/۶۷ خواهد شد.

همان‌طور که مشاهده شد، در مدل‌سازی از توابع متفاوتی می‌توان استنباط کرد. در صورتی که تابع خاصی موجود نباشد، در این صورت با استفاده از روش‌های آماری مدلی برای مسئلهٔ مورد بحث ساخته می‌شود که شرح آن از حوصلهٔ این مقاله خارج است.

## تمرین ۱

زیست‌شناسان متوجه شده‌اند، جیرجیر کردن گونه‌ای از جیرجیرک‌ها به دمای هوا بستگی دارد و این بستگی تا حدود زیادی خطی است. هر جیرجیرک در دمای ۷۰ درجهٔ فارنهایت هر دقیقه ۱۱۳ بار و در دمای ۸۰ درجهٔ فارنهایت هر دقیقه ۱۷۳ بار جیرجیر می‌کند. مدل دما ($T$) را برحسب تعداد جیرجیرها در دقیقه ($N$) به دست آورید. شیب نمودار این معادله چقدر است و نشانه چیست؟

## تمرین ۲

در جدول ۲ میانگین فاصلهٔ سیاره‌ها از خورشید $d$ (واحد اندازه‌گیری را برحسب فاصلهٔ زمین تا خورشید در نظر گرفته‌ایم) و همین‌طور دوره گردش آن‌ها $T$ (مدت یک دور گردش آن‌ها در یک سال) را آورده‌ایم.

| سیاره | d | T |
|---|---|---|
| تیر | ۰/۳۷۸ | ۰/۲۴۱ |
| زهره | ۰/۷۲۳ | ۰/۶۱۵ |
| زمین | ۱/۰۰۰ | ۱/۰۰۰ |
| ماه | ۱/۵۲۳ | ۱/۸۸۱ |
| مشتری | ۵/۲۰۳ | ۱۱/۸۶۱ |
| زحل | ۹/۵۴۱ | ۲۹/۴۵۷ |
| اورانوس | ۱۹/۱۹۰ | ۸۴/۰۰۸ |
| نپتون | ۳۰/۰۸۶ | ۱۶۴/۷۸۴ |

جدول ۲

**الف.** مدلی برای این داده‌ها پیدا کنید.

**ب.** بنابر قانون سوم کپلر برای حرکت سیارات، «مربع دورهٔ گردش سیاره با مکعب میانگین فاصله‌اش از خورشید متناسب است».

آیا مدل پیشنهادی شما قانون سوم کپلر را تأیید می‌کند؟


**منابع**

۱. ابراهیمی مطلق، محمد (۱۳۸۵). «مدل‌سازی». نشریهٔ شمارهٔ ۹. پیام دبیرخانهٔ ریاضی. پاییز.

۲. گروه ریاضی منطقه برخوار اصفهان (۱۳۸۶). **شاخه‌های علم ریاضی**. نشریهٔ شمارهٔ ۱۳۰. پیام دبیرخانهٔ ریاضی. زمستان.

۳. بخشعلی‌زاده، شهرناز و دیگران (۱۳۸۰). **کتاب معلم آمار و مدل‌سازی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش‌وپرورش.

۴. استوارت، جیمز (۱۳۸۸). **حساب دیفرانسیل و انتگرال** (ج ۱). ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات فاطمی.